INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A IX-A

1. Un program de calculator generează în fiecare secundă termeni ai unui șir $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ după următoarea regulă: primul termen, generat în prima secundă, este $a_1 = 1$ și fiecare termen generat în secundele următoare este de patru ori mai mare decât suma tuturor termenilor generați înaintea lui, adică $a_1 = 1$, $a_2 = 4a_1 = 4$, $a_3 = 4(a_1 + a_2) = 20$, etc.

La pornirea programului, pe ecranul calculatorului, sunt afișate într-un tabel fiecare secundă parcursă de program, valoarea termenului generat în acea secundă și suma termenilor generați până la acea secundă inclusiv.

a) Aflați ce valoare de termen apare pe tabel în dreptul secundei a cincea și cât este suma primilor cinci termeni.

b) Determinați expresia termenului general al șirului $(a_n)_{n\geq 2}$.

c) Aflați după câte secunde suma numerelor astfel generate devine egală cu 5^{2016}.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2\cdot[x]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $f(\sqrt{2}+1) - f(\sqrt{2})$.

b) Rezolvați ecuația $f(x) = \dfrac{9}{2}$.

c) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, arătați că $\left[f\left(\sqrt{n(n+1)}\right)\right] = -n$.

3. Un copil construiește, din cuburi cu muchia de $1\ cm$, o replică în miniatură a piramidei lui Keops. El observă că, dacă în vârf are nevoie de un singur cub, pe nivelul imediat inferior îi trebuie 9 cuburi iar apoi, pe nivelul imediat următor îi trebuie 25 de cuburi, deci pentru o piramidă cu doar trei nivele îi trebuie 35 de cuburi. Analizând problema, el descoperă că numărul de cuburi necesar pentru a construi o piramidă cu n nivele este dat de o formulă de forma $S_n = \dfrac{n(a\cdot n^2 - b)}{3}$, unde a și b sunt două numere naturale pe care le ține însă secrete.

Se cere:

a) Aflați câte cuburi trebuie la o piramidă cu 4 nivele.

b) Aflați formula descoperită de copil.

c) Demonstrați că formula descoperită de copil este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Fie paralelogramul $ABCD$ și punctele M, respectiv N, astfel încât $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$ și $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DN}$. Notăm $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ și $AM \cap BN = \{P\}$. Se cere:

a) Exprimați vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{DM}$ cu ajutorul vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

b) Dacă $\overrightarrow{CR} = 2\vec{v}$, arătați că A, N și R sunt puncte coliniare.

c) Determinați valoarea raportului $\dfrac{AP}{PM}$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A X-A

1. a) Dacă $a=\log_{30}3$ și $b=\log_{30}5$, calculați $\log_{30}8$ în funcție de a și b.

b) Rezolvați, în necunoscuta $x\in\mathbb{R}$, ecuația $\log_2 a^{x-2}=\log_4 a^{x+2}$, unde $a\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$.

2. Două programe de calculator, A și B, utilizează cifrele 1, 2, 3, 4, 5 pentru a genera în mod aleator numere de 6 cifre de un tip prestabilit. Astfel, programul A generează aleator numere în care cifra 2 apare exact de două ori, prima dată pe poziția cifrei sutelor de mii și a doua oară pe poziția cifrei unităților (spre exemplu, 213432) iar programul B generează aleator numere în care cifra 2 apare de cel puțin 4 ori (spre exemplu, 252222). Se cere:

a) Să se determine probabilitatea ca primul număr generat de programul A să fie 234432.

b) Să se determine probabilitatea ca primul număr generat de programul A să fie de forma $\overline{2abba2}$, cu $a\neq b$.

c) Să se determine probabilitatea ca primul număr generat de programul B să conțină exact 4 de 2.

d) Să se determine care din cele două programe poate genera mai multe numere.

3. O persoană a plasat într-o bancă un capital inițial de 1500 lei, cu o dobândă simplă de 5%, adică, la împlinirea fiecărui an de la depunere, noul capital crește de fiecare dată cu 5% față de capitalul introdus la început. Notăm cu C_n capitalul persoanei, exprimat în lei, după împlinirea a exact n ani de la depunere.

a) Arătați că șirul $(C_n)_{n\geq 0}$ este progresie aritmetică, și determinați expresia termenului general al șirului $(C_n)_{n\geq 0}$.

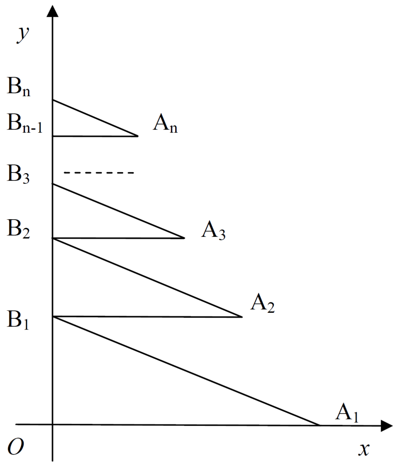
b) Determinați ce capital va avea persoana după 8 ani și după câți ani capitalul persoanei se va dubla.

c) Arătați că, indiferent de capitalul depus inițial, la o depunere cu dobândă simplă capitalul persoanei devine cel puțin dublu după același număr de ani.

4. O parte din acoperișul unui viitor hotel dintr-o stațiune montană a fost proiectată în formă de brad și alcătuită din mai multe elemente de formă triunghiulară, suprapuse ca în figura alăturată. Acestea au la bază triunghiul OA_1B_1 cu $OA_1=\sqrt{3}$, $OB_1=1$, iar la vârf triunghiul $B_{n-1}A_nB_n$. Triunghiurile $B_{k-1}A_kB_k$, $k\in\overline{2;n}$, sunt toate dreptunghice în B_{k-1} și au vârfurile $A_k(x_k;y_k)$,

__Notă:__ Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

unde abscisa x_k , $k \geq 2$, este termen de progresie geometrică, cu $x_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ și rația $q = \frac{3}{4}$, iar ordonata y_k , $k \geq 2$, este sumă de progresie geometrică, $y_k = a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}$, cu $a_1 = 1$ și rația $q = \frac{3}{4}$. Se cere:



a) Determinați coordonatele punctelor A_2 și A_3.

b) Arătați că A_1, A_2 și A_3 sunt coliniare.

c) Arătați că toate punctele $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt coliniare.

d) Știind că unitatea de pe axele sistemului de coordonate reprezintă $1\ m$, arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, înălțimea $[OB_n]$ a acoperișului nu poate depăși $4\ m$.

.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI-A

1. Fie funcția $f:(-\infty;-1)\cup(1;\ +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\dfrac{x-1}{x+1}$. Se cere:

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^{x^2}$.

2. Funcția profit pentru producția unui utilaj este dată de formula $P(x)=\dfrac{-x^2+16x-4}{4x^2+16}$, $x\geq 0$, unde x este numărul utilajelor produse, exprimat în mii de unități, iar $P(x)$ exprimă miliarde lei. Se cere:

a) Determinați numărul minim și numărul maxim de utilaje care trebuie produse pentru ca firma producătoare să nu lucreze în pierdere.

b) Determinați ecuația asimptotelor funcției P și aflați ce s-ar întâmpla cu profitul dacă producția ar crește nelimitat.

c) Determinați câte utilaje ar trebui folosite pentru a obține profitul maxim posibil și care este valoarea maximă a profitului.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$. Se cere:

a) Arătați că f este bijectivă.

b) Calculați $(f^{-1})'(3)$.

c) Fie A, B, C puncte distincte pe graficul funcției f, cu coordonatele numere naturale. Arătați că punctele sunt necoliniare și aria triunghiului ABC este număr natural divizibil prin 3.

4. Pe un sistem ortogonal de coordonate, considerăm mulțimea T a tuturor triunghiurilor care au coordonatele numere naturale de o cifră și aria număr natural. Fie A mulțimea numerelor naturale care sunt măsuri de arie la triunghiuri din mulțimea T. Se cere:

a) Arătați că în T există triunghiuri de arie 1 dar nu există triunghiuri de arie 41.

b) Determinați numărul triunghiurilor de arie maximă din T.

c) Arătați că oricare trei puncte necoliniare, care au coordonatele numere naturale de o cifră și de parități diferite, determină un triunghi din T.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
7 mai 2016

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și legea de compoziție pe $\mathbb{R}$, $x \circ y = xy + 5ax + 2by$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă.

b) Pentru $a = \dfrac{1}{5}$ și $b = \dfrac{1}{2}$ se cere:

1. arătați că legea este asociativă și are element neutru;
2. determinați mulțimea elementelor inversabile;
3. calculați $1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ 2015$.

2. Considerăm funcția $F : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x t^3 \sqrt{t^2+3}\, dt$.

a) Arătați că F este strict crescătoare pe $[0; +\infty)$.

b) Calculați $F(1)$.

c) Calculați $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{F(x)}{x^4}$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x^5}$.

3. Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului $f = x^3 - x + 2$ și sumele $N_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{Z}$, numite sume Newton. Se cere:

a) Folosind relațiile Viète, calculați $N_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

b) Observând că numerele x_1, x_2, x_3 verifică ecuația $x^3 - x + 2 = 0$, calculați $N_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

c) Calculați N_4, N_9 și N_{10}.

4. Anumite piese ale unui angrenaj, notate P_n, au o formă specială, ea fiind corpul de rotație obținut prin rotirea în jurul axei *Oy (Atenție, axa de rotație este Oy, nu Ox !)* a graficului funcției $f_n : [0;1] \to [0;1]$, $f_n(x) = \sqrt[n]{1-x}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ este stabilit de inginerul proiectant iar 1 pe axele de coordonate reprezintă 1 *dm*.

a) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, funcția f_n este bijectivă, cu inversa $f_n^{-1} : [0;1] \to [0;1]$, $f_n^{-1}(y) = 1 - y^n$.

b) Determinați aria secțiunii realizată prin axa de simetrie a piesei P_3.

c) Notând V_n volumul piesei pentru fiecare caz $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, arătați că

$$V_n = \frac{2n^2\pi}{(n+1)(2n+1)}\ (dm^3).$$

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*